Besvarelser til Calculus
Ordinær Eksamen - 12. Juni 2017

Mikkel Findinge

Bemærk, at der kan være sneget sig fejl ind.
Kontakt mig endelig, hvis du skulle falde over en sådan.
Dette dokument har udelukkende til opgave at forklare,
hvordan man kommer frem til facit i de enkelte opgaver.
Der er altså ikke afkrydsningsfelter, der er kun facit og tilhørende udregninger.
Udregningerne er meget udpenslede, så de fleste kan være med.

Indhold

Opgave 1

En kurve i planen er givet ved

$$x = e^t$$
$$y = \ln t,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. For hvilken parameter t går kurven gennem punktet $P = (e, 0)$?

Tager vi logaritmen på begge sider af $x = e^t$, får vi, at $t = \ln x$. Vi ved fra punktet P, at $x = e$, hvorfor vi indsætter dette og får:

$$t = \ln e = 1.$$

Nu har vi altså fundet værdien. Jeg tjekker dog blot lige, om denne t-værdi opfylder, at $y = 0$ jævnfør punktet P. Vi indsætter i $y = \ln t$ og får:

$$y = \ln 1 = 0,$$

hvilket altså betyder, at $t = 1$ for kurven giver punktet P.

b. Hvad er kurvens hastighedsvektor i P?

Vi skal blot differentiere x og y i forhold til t og sætte $t = 1$. Vi har:

$$x'(t) = e^t, \qquad y'(t) = \frac{1}{t}.$$

Dermed er

$$x'(1) = e^1 = e, \qquad y'(1) = \frac{1}{1} = 1.$$

Altså bliver hastighedsvektoren:

$$\begin{bmatrix} x'(1) \\ y'(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e \\ 1 \end{bmatrix}.$$

c. Hvilket udtryk for kurvens krumning, kan man opnå?

Vi har formlen

$$\kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{((x')^2 + (y')^2)^{3/2}} = \frac{x'y'' - y'x''}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}^3}.$$

Vi kender allerede x' og y', så vi kan prøve at udregne nævneren til $t = 1$ (punktet P):

$$\sqrt{(x'(1))^2 + (y'(1))^2}^3 = \sqrt{e^2 + 1^2}^3 = \sqrt{e^2 + 1}^3.$$

For at udregne tælleren skal vi bruge x'' og y'', hvorfor vi differentierer x' og y':

$$x''(t) = e^t, \qquad y''(t) = -\frac{1}{t^2},$$

hvorfor vi har:

$$x''(1) = e^1 = e, \qquad y''(1) = -\frac{1}{1^1} = -1.$$

Indsætter vi det i nævneren fås:

$$|x'(1)y''(1) - y'(1)x''(1)| = |e \cdot (-1) - 1 \cdot e| = |-e - e| = |-2e| = 2e.$$

Altså bliver udtrykket for κ i punktet P:

$$\kappa(P) = \frac{2e}{\sqrt{e^2+1}^3}.$$

Opgave 2

Funktionen f er defineret ved

$$f(x, y) = x^2 e^{-y}.$$

Den bestemmer en flade ved $z = f(x, y)$, som indeholder punktet $P = (1, -1, e)$.

a. Tangentplanen for fladen i punktet P er bestemt ved en eller flere af ligningerne. Hvilke(n)?

Tangentplanens ligning er givet ved

$$z - P_z = f_x(P_x, P_y) \cdot (x - P_x) + f_y(P_x, P_y) \cdot (y - P_y).$$

Lad os først udregne f_x og f_y. Vi får:

$$f_x(x, y) = 2xe^{-y} \qquad \Rightarrow f_x(P_x, P_y) = 2 \cdot 1 \cdot e^{-(-1)} = 2e^1 = 2e \tag{3.1}$$

$$f_y(x, y) = x^2 \cdot (-1)e^{-y} \quad \Rightarrow f_y(P_x, P_y) = 1^2 \cdot (-1)e^{-(-1)} = 1 \cdot (-1)e^1 = -e \tag{3.2}$$

Vi har altså:

$$z - e = 2e(x - 1) - e(y + 1).$$

Altså er første mulighed et facit. Vi kan se, at anden mulighed (læser søjlevist) ikke kan være muligt, da hældningen ganget på x kun svarer til 2 og ikke $2e$. Lad os nu betragte $-e(y + 1) = -ey - e$ lægger vi $2e$ til på begge sider af

$$z - e = 2e(x - 1) - e(y + 1) = 2e(x - 1) - ey - e,$$

får vi

$$z + e = z - e + 2e = 2e(x - 1) - ey - e + 2e = 2e(x - 1) - ey + e = 2e(x - 1) - e(y - 1),$$

hvilket betyder, at tredje mulighed også er et svar. I mulighed 4 mangler der simpelthen en y-koordinat i ligningen, hvorfor denne ikke kan være et svar. Ved mulighed 5 sætter vi e uden for parentes og får:

$$\begin{aligned} z - e = 2e(x - 1) - e(y + 1) \Leftrightarrow \\ z &= 2e(x - 1) - e(y + 1) + e = e(2(x - 1) - (y + 1) + 1) = e(2x - 2 - y - 1 + 1) \\ &= e(2x - y - 2), \end{aligned}$$

hvilket altså også er et svar. Slutteligt ser vi, at mulighed 6 kun har divideret med e på højre side og ikke venstre side i forhold til mulighed 5 (som var et svar), hvilket ikke er en gyldig omskrivning. Derfor er mulighed 6 ikke et svar.

Hvilket udtryk har den anden ordens partielle afledede $f_{xy}(x, y)$?

Vi differentierer blot f_x i forhold til y eller differentierer f_y i forhold til x. Jeg vælger sidstnævnte:

$$f_{xy}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x^2 e^{-y}\right) = -2xe^{-y}.$$

Opgave 3

En kurve i rummet er givet ved

$$x = \ln(t),$$
$$y = \sqrt{2}t,$$
$$z = \frac{1}{2}t^2,$$

hvor parameteren t gennemløber de positive reelle tal.

a. Bestem det korrekte udtryk for farten $v(t)$.

Farten $v(t)$ er givet ved

$$v(t) = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}.$$

Vi udregner altså først de afledede:

$$x' = \frac{1}{t}, \quad y' = \sqrt{2}, \quad z' = \frac{1}{2}2t = t.$$

Vi indsætter:

$$v(t) = \sqrt{\left(\frac{1}{t}\right)^2 + \sqrt{2}^2 + t^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2 + t^2}.$$

Hvis vi nu betragter det inden i kvadratroden, så kunne det godt ligne, at vi kunne bruge en kvadratsætning, da $1/t \cdot t = 1$, hvorfor det dobbelte produkt af de to altså må være 2. Vi har:

$$v(t) = \sqrt{\frac{1}{t^2} + 2 + t^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{t} + t\right)^2} = \frac{1}{t} + t.$$

b. Hvad er buelængden af kurven fra $t = 1$ til $t = e$?

Vi skal blot integrere fart-funktionen fra $t = 1$ til $t = e$. Vi har:

$$\begin{aligned}\int_1^e \frac{1}{t} + t\,dt &= \left[\ln(t) + \frac{1}{2}t^2\right]_1^e \\ &= \left(\ln(e) + \frac{1}{2}e^2\right) - \left(\ln(1) + \frac{1}{2}1^2\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}e^2 \\ &= \frac{1}{2}(e^2 + 1)\end{aligned}$$

Opgave 4

En funktion er defineret ved

$$f(x) = sin(x^2)$$

for en reel parameter x.

a. Hvad er differentialkvotienten $f'(x)$?

Vi skal bruge kædereglen. Den indre funktion, x^2, differentieret - ganget på den ydre funktion, $\sin(u)$ differentieret i forhold til u, hvor $u = x^2$. Vi har:

$$f'(x) = \left(x^2\right)' \cdot (\sin(u))' = 2x \cdot \cos(u) = 2x\cos(x^2)$$

b. Bestem anden ordens Taylor polynomiet for funktionen f med udviklingspunkt $x = 0$.

Et anden ordens Taylor polynomium er givet ved:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}f''(x_0)(x - x_0)^2.$$

Vi har, at $x_0 = 0$, hvilket giver:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2.$$

Vi kender allerede f og f' og får ved at sætte $x = 0$:

$$f(0) = \sin(0^2) = \sin 0 = 0, \qquad f'(0) = 2 \cdot 0 \cdot \cos 0^2 = 0.$$

Det vil sige, at første og andet led i polynomiet er ubetydelige, og udtrykket bliver i stedet:

$$P_2(x) = 0 + 0 \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2 = \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2.$$

Vi finder nu den dobbelt afledede ved at bruge både produktreglen og kædereglen:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(2x\cos(x^2)\right)' \\ &= 2x\left(\cos x^2\right)' + (2x)'\cos x^2 \\ &= 2x \cdot 2x \cdot (-\sin x^2) + 2\cos x^2 \\ &= -4x^2\sin(x^2) + 2\cos(x^2). \end{aligned}$$

Vi sætter $x = 0$ og får:

$$f''(0) = -4 \cdot 0^2 \sin(0^2) + 2\cos(0^2) = 2\cos 0 = 2.$$

Dermed bliver

$$P_2(x) = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^2 = x^2.$$

Opgave 5

Et komplekst tal er givet ved $z = 1 + \sqrt{3}i$.

Hvad er $\bar{z}$ (z konjugeret) skrevet på polær form?

Først og fremmest er $\bar{z} = 1 - \sqrt{3}i$, da kun imaginærdelen skifter fortegn. Vi udregner først modulus:

$$|z| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2.$$

Det vil sige, at vi kan fjerne alle svarmuligheder, hvor 2 ikke er foran e. Da $|z|e^{i\theta} = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, skal vi blot finde det θ, sådan at $\cos\theta = 1/2$ og $\sin\theta = -\sqrt{3}$. Ved at huske eller slå op på en liste over sinus- og cosinus-værdier ses det, at $\theta = 5\pi/3$ eller alternativt:

$$\theta = \frac{5\pi}{3} - 2\pi = \frac{5\pi}{3} - \frac{6\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}.$$

Altså bliver den polære form for $\bar{z}$:

$$\bar{z} = 2e^{-\frac{\pi i}{3}}.$$

b. Hvad er z^3 skrevet på standard form?

Vi husker regnereglerne $\cos(-x) = \cos x$ og $\sin(-x) = -\sin(x)$. Disse betyder, at vi blot kan smide en negativt fortegn på θ i opgaven fra før for at opnå den polære form for z (og altså ikke $\bar{z}$). Vi har for z:

$$z = 2e^{-\left(\frac{\pi i}{3}\right)} = 2e^{\frac{\pi i}{3}}.$$

Hvilket vil sige, at vi blot kan bruge potens-regneregler for at udregne z^3:

$$z^3 = \left(2e^{\frac{\pi i}{3}}\right)^3 = 2^3 e^{\frac{\pi i}{3}\cdot 3} = 8e^{\pi i} = 8\left(\cos(\pi) + i\sin(\pi)\right) = 8\left(-1 + 0i\right) = -8.$$

Note: Hvis man forstår metoden, er denne langt hurtigere end at gange parenteserne $(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)(1+\sqrt{3}i)$ sammen.

Opgave 6

Et komplekst tal z kaldes *rent imaginær*, hvis det ligger på den imaginære akse, dvs. hvis det er på formen $z = iy$ for et reelt tal y.

a. For nogle komplekse tal z gælder det, at z^2 er rent imaginær. Hvilke af svarmulighederne beskriver netop alle disse tal?

Jeg elsker de her opgaver, de gør mig glad - så I får to metoder til at løse dem på.

Metode 1 - Udelukkelsesmetoden

z rent imaginær: Vi vælger blot $z = i$ og ser, at $z^2 = i^2 = -1$, hvilket ikke er et rent imaginært tal. Derfor er det ikke alle rene imaginære tal, der opfylder dette, hvorfor svarmuligheden er falsk.

Alle komplekse tal: Denne følger direkte af den forrige, da alle imaginære og reelle tal er komplekse tal. Det gælder ikke for i, så det gælder ikke for alle komplekse tal. Vi kunne også have sagt $1^2 = 1$, hvilket heller ikke er rent imaginært.

z på formen $x(1+i)$, x reel: Vi prøver:

$$z^2 = (x(1+i))^2 = x^2(1+i)^2 = x^2(1^2 + i^2 + 2i) = x^2(1 - 1 + 2i) = 2ix^2.$$

Da x er reel, så vil x^2 også være reel. Derfor vil hele udtrykket $2ix^2$ altid være imaginært. Spørgsmålet er bare, om dette beskriver hele mængden.

$z = x(1-i)$, x reel: Denne er egentlig blevet udelukket af forrige svarmulighed, da $x(1-i)$ ikke indeholder mængden $x(1+i)$. Dog hvis $x(1-i)$ også er en løsningsmængde, så er $x(1+i)$ også en utilstrækkelig svarmulighed. Vi ser:

$$z^2 = (x(1-i))^2 = x^2(1-i)^2 = x^2(1^2 + i^2 - 2i) = x^2(1 - 1 - 2i) = -2ix^2,$$

hvilket også er rent imaginært, hvorfor $z = x(1+i)$ også er en utilstrækkelig svarmulighed.

$z = x(1 \pm i), x \geq 0$: Vi ser, at denne restringerer x værdierne til $x \geq 0$. Men eftersom vi har set, at

$$z^2 = (x(1 \pm i))^2) \pm 2ix^2,$$

hvor x er reel, og x^2 derfor også er reel, så kan vi tillade alle de reelle værdier af x, vi har lyst til. Derfor er svaret $z = x(1 \pm i), x \geq 0$.

Metode 2 - Bevis

Lad $x, y \in \mathbb{R}$, og lad $z = x + iy$. Så søger vi de komplekse tal z, der opfylder, at $z^2 = ic$, hvor $c \in \mathbb{R}$. Vi har:

$$z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Da z^2 skal være lig ic, har vi:

$$x^2 - y^2 + 2ixy = ic.$$

Da x og y er reelle, og det yderligere ses, at højresiden kun indeholder et imaginært led, så må $x^2 - y^2 = 0$, da disse to led ikke kan påvirke de imaginære led. Vi har:

$$x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x^2 \Leftrightarrow y = \pm x.$$

Men dette udtryk for y kan vi indsætte i $z = x + iy$:

$$z = x + iy = x + i(\pm x) = x \pm ix = x(1 \pm i).$$

Hvor x blot skal være reelt. Vi har nu fundet svaret.

b. For nogle komplekse tal z gælder det, at $z\bar{z}$ er reel. Hvilke af svarmulighederne beskriver netop alle disse tal?

Dette gælder for alle komplekse tal, hvilket skulle være en kendt resultat for alle. Beviset går dog således: Lad $z = x + iy$, hvor x og y er reelle, så er $\bar{z} = x - iy$. Dermed er:

$$z\bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 = x^2 + y^2,$$

hvilket også er reelt.

Note: $z\bar{z}$ svarer faktisk til modulus af z^2. Vi har:

$$|z|^2 = \sqrt{x^2 + y^2}^2 = x^2 + y^2 = z\bar{z}.$$

c. For nogle komplekse tal z gælder det, at $\frac{\bar{z}}{z}$ er reel. Hvilke af svarmulighederne beskriver netop alle disse tal?

Vi ved, at man ikke må dividere med 0, hvilket kun er svarmulighed 1, der udelukker. Men hvis vi lige skal gribe det lidt mere besværligt an:

Lad os omskrive brøken ved at forlænge den med $\bar{z}$:

$$\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{\bar{z}^2}{z\bar{z}}.$$

Vi ved fra forrige opgave, at nævneren er reel. Det vil sige, at vi reelt blot kan se bort fra denne. Vi betragter altså kun tælleren. Lad $\bar{z} = x + iy$, så er

$$\bar{z}^2 = (x + iy)^2 = x^2 + i^2y^2 + 2ixy = x^2 - y^2 + 2ixy.$$

Vi skal have, at dette er reelt, men det er det kun, hvis $2ixy = 0$. Dette er kun opfyldt, hvis $x = 0$ og/eller $y = 0$. Hvilket betyder, at z må være et reelt tal eller rent imaginært. 0 er dog stadig udelukket, da vi ikke må have, at $x = y = 0$, eftersom man ikke kan dividere med 0.

Opgave 7

En homogen anden ordens differentialligning er givet ved

$$y'' - 4y' + 8y = 0.$$

a. Find den fuldstændige løsning til differentialligningen.

Note: Selve opgaveformuleringen i eksamenssættet kan faktisk misforstås, da der står "Markér DET udtryk, som udgør den fuldstændige løsning til differentialligningen."i stedet for "DE(T)", hvorfor man kan tro, der kun er ét svar. En uheldig formulering.

Vi løser det karakteristiske polynomium $r^2 - 4r + 8 = 0$. Vi finder først diskriminanten:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 16 - 32 = -16 = (4i)^2,$$

hvorfor vi får løsningerne:

$$r = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(4i)^2}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm (4i)}{2} = 2 \pm 2i.$$

Komplekse rødder på formen $r = a + bi$ giver den generelle fuldstændige løsning:

$$y(t) = c_1 e^{at} \cos(bt) + c_2 e^{at} \sin(bt),$$

hvilket i vores tilfælde giver:

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(2t) + c_2 e^{2t} \sin(2t).$$

Vi kan dog også vælge roden med den negative imaginær-del:

$$y(t) = c_1 e^{2t} \cos(-2t) + c_2 e^{2t} \sin(-2t).$$

Da $\cos\theta = \cos(-\theta)$ sker der ingen ændring ved cosinus-delen. Vi har ydermere, at $\sin(-\theta) = -\sin(\theta)$, hvilket egentligt blot betyder, at konstanten c_2 vil skifte fortegn afhængig af, hvilken fuldstændig løsning, der vælges.

b. Hvilken funktion løser begyndelsesbetingelserne $y(0) = 2, y'(0) = 6$?

Standardmetoden:

Hvis betragter $y(0)$ i forhold til en af vores fundne løsninger i a.

$$y(0) = c_1 e^{2 \cdot 0} \cos(2 \cdot 0) + c_2 e^{2 \cdot 0} \sin(2 \cdot 0) = c_1 e^0 + c_2 \cdot 0 = c_1 = 2.$$

Vi har altså:

$$y(t) = 2e^{2t} \cos(2t) + c_2 e^{2t} \sin(2t).$$

Differentieres denne fås:

$$y'(t) = 2 \cdot 2e^{2t} \cos(2t) + 2 \cdot (-2)e^{2t} \sin(2t) + c_2 \cdot 2e^{2t} \sin(2t) + c_2 \cdot 2e^{2t} \cos(2t).$$

Indsættes $t = 0$:

$$
\begin{aligned}
y'(0) &= 2 \cdot 2e^{2\cdot 0}\cos(2\cdot 0) + 2\cdot(-2)e^{2\cdot 0}\sin(2\cdot 0) + c_2 \cdot 2e^{2\cdot 0}\sin(2\cdot 0) + c_2 \cdot 2e^{2\cdot 0}\cos(2\cdot 0) \\
&= 4e^0\cos(0) - 4e^0\sin(0) + 2c_2e^0\sin(0) + 2c_2e^0\cos(0) \\
&= 4 + 2c_2e^0\cos(0) \\
&= 4 + 2c_2 \\
&= 6 \Rightarrow \\
c_2 &= \frac{6-4}{2} = \frac{2}{2} = 1.
\end{aligned}
$$

Den løsningen, der opfylder disse betingelser er altså:

$$y(t) = 2e^{2t}\cos(2t) + e^{2t}\sin(2t).$$

Den simple metode:

Vi indser hurtigt (maks 10 sekunder), at det kun er de to øverste funktioner af hver søjle, der opfylder, at når vi sætter $t = 0$, så får vi værdien 2. Vi skal altså derfor blot differentiere disse to funktioner og derefter indsætte $t = 0$ i de afledede. Hvis ingen af disse opfylder, at $y'(0) = 6$, så krydser vi feltet *ingen af dem* af.

c. Find den partikulære løsning til den inhomogene differentialligning

$$y'' - 4y' + 8y = t^2.$$

Der er en hurtig udelukkelsesmetode, man kan bruge for at finde den partikulære løsning, når man har valgumuligheder. - Men det er for trættende at skulle forklare på skrift, så I må nøjes med den stringente metode: Vi gætter på en partikulær løsning:

$$y_p(t) = at^2 + bt + c,$$

hvilken differentieres to gange:

$$y_p'(t) = 2at + b, \qquad y_p''(t) = 2a.$$

Vi indsætter så disse i differentialligningen:

$$t^2 = y_p'' - 4y_p' + 8y_p = 2a - 4(2at+b) + 8(at^2+bt+c) = 2a - 8at - 4b + 8at^2 + 8bt + 8c = 8at^2 + (-8a+8b)t$$

Dette giver os 3 ligninger. Først:

$$8at^2 = t^2 \Leftrightarrow 8a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{8}$$

Dernæst

$$(-8a+8b)t = (-8\cdot\frac{1}{8}+8b)t = (-1+8b)t = 0t = 0 \Leftrightarrow -1+8b = 0 \Leftrightarrow 8b = 1 \Leftrightarrow b = \frac{1}{8}.$$

Allerede nu kan vi spotte den korrekte løsning.

Opgave 8

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1.$$

Det oplyses, at grafen for funktionen danner en opadgående skål mod ∞ (åbner sig opad).

a. Hvilke af de givne punkter er kritiske punkter?

Vi differentierer først f mht. både x og y:

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4y, \qquad f_y(x,y) = 4y^3 - 4x.$$

Der er to måder. Enten kan du blot indsætte de punkter, du har fået givet, og så tjekke, om både f_x og f_y giver 0, eller vi kan finde alle løsninger. Den første metode bør være lige til, hvorfor jeg fokuserer på den anden. Vi betragter:

$$f_x(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4x^3 - 4y = 0 \Leftrightarrow x^3 - y = 0 \Leftrightarrow y = x^3.$$

Bemærk, at dette betyder, at y og x skal have samme fortegn. Denne værdi for y kan vi nu indsætte i f_y:

$$f_y(x,y) = 0 \Leftrightarrow 4y^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow y^3 - x = (x^3)^3 - x = x^{3\cdot 3} - x = x^9 - x = x(x^8 - 1) = 0.$$

Vi kan altså se, at $x = 0$ er en løsning. Derudover kan vi se fra parentesen, at $x^8 = 1$. Da 8 er et lige tal, kan x både være -1 og 1. Vi har altså 3 mulige værdier for x, som vi så kan indsætte i udtrykket for $y = x^3$:

$$y(0) = 0^3 = 0, \qquad y(-1) = (-1)^3 = -1, \qquad y(1) = 1^3 = 1.$$

Vi har altså de kritiske punkter $(0,0)$, $(-1,-1)$ og $(1,1)$.

b. Hvad er den mindste værdi, som funktionen f antager?

Vi ved, at det er en form for skål, der åbner sig opad. Dette betyder, at den antager et minimum i et punkt - et kritisk punkt! Så vi indsætter blot de punkter, vi fandt fra før i funktionen og finder:

$$\begin{aligned}
f(0,0) &= 0^4 + 0^4 - 4\cdot 0\cdot 0 + 1 = 1,\\
f(-1,-1) &= (-1)^4 + (-1)^4 - 4\cdot(-1)\cdot(-1) + 1 = 1 + 1 - 4 + 1 = -1\\
f(1,1) &= 1^4 + 1^4 - 4\cdot 1\cdot 1 + 1 = 1 + 1 - 4 + 1 = -1
\end{aligned}$$

Altså er den mindste værdi, der antages, -1, hvilken sker både i $(1,1)$ og $(-1,-1)$.

c. Antager funktionen et lokalt maksimum i Origo $(0,0)$?

Nej, det er forholdsvist let at forestille sig, at eftersom figuren åbner sig opad, samtidig med, at den (kun) har to pukler i form af globale minima, så kan Origo ikke være andet end et saddelpunkt.

En mere matematisk tilgang kan måske vise, hvorfor det er et saddelpunkt. Lad os betragte funktionen i de punkter, hvor $y = x$. På denne linje ligger både $(0,0)$, $(-1,-1)$ og $(1,1)$. Indsætter vi x på y's plads i funktionen fås:

$$f_1(x) = f(x,x) = x^4 + x^4 - 4xx + 1 = 2x^4 - 4x^2 + 1.$$

Differentieres denne opnår vi:

$$f_1'(x) = 8x^3 - 8x = 8x(x^2 - 1).$$

Det er selvfølgelig de samme kritiske punkter, vi finder her, men det er ikke det interessante. Det, vi kigger på, er hvad er hældningen imellem $(0,0)$ og de to andre kritiske punkter. Jeg vælger her $x = 1/2$ og $x = -1/2$ til at vise disse hældninger:

$$f_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\frac{-1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = -4\left(\frac{1}{4} - 1\right) = -1 + 4 = 3$$

og

$$f_1'\left(\frac{1}{2}\right) = 8\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1\right) = 4\left(\frac{1}{4} - 1\right) = 1 - 4 = -3.$$

Funktionen vokser altså, når den går imod $(0,0)$ men aftager så igen efter (fortegnet af hældningerne), når vi bevæger os på linjen $y = x$. Det betyder, at $(0,0)$ agerer som et maksimum, når vi bevæger os langs $y = x$. Hvad hvis vi i stedet kommer fra linjen, der går vinkelret ind på $y = x$? Vi betragter altså nu $y = -x$ og får:

$$f_2(x) = f(x,-x) = x^4 + (-x)^4 - 4x(-x) + 1 = x^4 + x^4 + 4x^2 + 1 = 2x^4 + 4x^2 + 1.$$

Differentierer vi denne fås:

$$f_2'(x) = 8x^3 + 8x = 8x(x^2 + 1).$$

Der er ingen kritiske punkter foruden 0 her, så vi skal blot vælge x-værdier på hver side af Origo. - Så jeg vælger de samme værdier som før:

$$f_2'\left(-\frac{1}{2}\right) = 8\frac{-1}{2}\left(\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = -4\left(\frac{1}{4} + 1\right) = -1 - 4 = -5.$$

$$f_2'\left(\frac{1}{2}\right) = 8\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1\right) = 4\left(\frac{1}{4} + 1\right) = 1 + 4 = 5.$$

Forskellige fortegn, men hvis vi bevæger os i retningen $y = -x$, ser vi, at Origo agerer som et minimum, da funktionen aftager til den rammer Origo for derefter at vokse. Origo agerer altså både som et minimum og et maksimum afhængig af retningen. Dette betyder, at Origo er et saddelpunkt.

Opgave 9

Hvilken af de følgende formler svarer til *Laplace transformationen*, $F(s), s > 2$ af funktionen

$$f(t) = e^{2t} + \cos(3t), \quad t \geq 0$$

Svar:

Vi slår op i tabellen for Laplace transformationer. Vi ser, at

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}, \qquad \mathcal{L}\left\{\cos(at)\right\} = \frac{s}{s^2+a^2}.$$

Dermed har vi:

$$F(s) = \mathcal{L}\left\{e^{2t} + \cos(3t)\right\} = \mathcal{L}\left\{e^{2t}\right\} + \mathcal{L}\left\{\cos(3t)\right\} = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+3^2} = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+9}.$$

Det eneste, der mangler, er at få skrevet dem på fælles brøkstreg. Vi har:

$$F(s) = \frac{1}{s-2} + \frac{s}{s^2+9} = \frac{s^2+9}{(s-2)(s^2+9)} + \frac{s(s-2)}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{s^2+9+s^2-2s}{(s-2)(s^2+9)} = \frac{2s^2-2s+9}{(s-2)(s^2+9)}.$$

Opgave 10

Hvilken af de følgende formler svarer til den *inverse Laplace transformation* $f(t)$, $t \geq 0$ af funktionen

$$F(s) = \frac{7s-7}{(s-3)(s+4)}, \quad s > 3?$$

Svar:

Udtrykket ligner umiddelbart ikke noget, vi kan slå op i en tabel, så vi vil splitte brøken op. Dette gøres ved metoden partielle brøker. Vi har:

$$\frac{7s-7}{(s-3)(s+4)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+4}.$$

Vi ganger med $(s-3)(s+4)$ på begge sider og får:

$$7s - 7 = A(s+4) + B(s-3) = As + 4A + Bs - 3B = (A+B)s + (4A - 3B).$$

Af dette udtryk får vi to ligninger, nemlig:

$$A + B = 7, \qquad 4A - 3B = -7.$$

Vi løser den første i forhold til A og får $A = 7 - B$. Dette indsætter vi så i den anden ligning og får:

$$4A-3B = 4(7-B)-3B = 4\cdot 7-4B-3B = 28-7B = -7 \Leftrightarrow -7B = -7-28 = -35.$$

Divideres med 7 på begge sider, får vi, at

$$B = 5.$$

Dette kan vi så indsætte i udtrykket $A = 7 - B = 7 - 5 = 2$. Dermed ved vi, at:

$$F(s) = \frac{7s-7}{(s-3)(s+4)} = \frac{2}{s-3} + \frac{5}{s+4} = 2\frac{1}{s-3} + 5\frac{1}{s+4},$$

og disse kan vi slå op i tabellen over Laplace-transformer, det er nemlig præcis den, vi brugte i forrige opgave:

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}\right\} = \frac{1}{s-a}.$$

Vi får altså:

$$\mathcal{L}\left\{F(s)\right\}^{-1} = 2\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s-3}\right\}^{-1} + 5\mathcal{L}\left\{\frac{1}{s+4}\right\}^{-1} = 2e^{3t} + 5e^{-4t}.$$

Opgave 11

Note: Jeg hader den her opgave, fordi vedkommende bruger decimaler frem for brøker! Det niveau vil jeg ikke synke ned på.

En funktion er defineret ved

$$f(x,y) = (x+y)e^{x^2-y^2}.$$

a. Bestem den retningsafledede $D_{\mathbf{u}}f(P)$ i punktet $P = (1,1)$ og retningen bestemt ved enhedsvektoren $\mathbf{u} = \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

Først skal vi finde f_x og f_y. Vi har ved brug af kædereglen og produktreglen:

$$f_x(x,y) = (x+y)2xe^{x^2-y^2} + e^{x^2-y^2}, \qquad f_y(x,y) = (x+y)(-2y)e^{x^2-y^2} + e^{x^2-y^2}.$$

Indsætter vi punktet $P = (1,1)$ får vi:

$$f_x(1,1) = (1+1)2 \cdot 1e^{1^2-1^2} + e^{1^2-1^2} = 4e^0 + e^0 = 4+1 = 5,$$

og

$$f_x(1,1) = (1+1)(-2 \cdot 1)e^{1^2-1^2} + e^{1^2-1^2} = -4e^0 + e^0 = -4+1 = -3.$$

Dermed er gradientvektoren i punktet $P = (1,1)$:

$$\nabla f(P) = (5, -3).$$

Den retningsafledede er blot skalarproduktet mellem gradientvektoren og enhedsvektoren. Vi har altså:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = (5,-3) \cdot \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right) = 5 \cdot \frac{4}{5} - 3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{20}{5} - \frac{9}{5} = \frac{11}{5}.$$

Hvis I vil have det med decimaler, så må I selv gøre det. Jeg nægter i hvert fald i så simple tilfælde!

b. Hver af svarmulighederne, v, bestemmer en enhedsvektor u, som peger i samme retning som v. Find alle vektorer i listen for hvilke det gælder, at $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$.

Vi betragter samme $\nabla f(P)$ fra før. Ydermere lader vi $\mathbf{u} = (x_1, x_2)$. Opgaven lyder altså på at bestemme de x_1 og x_2, som opfylder $D_{\mathbf{u}}f(P) = 0$. Vi har:

$$D_{\mathbf{u}}f(P) = \nabla f(P) \cdot \mathbf{u} = (5,-3) \cdot (x_1, x_2) = 5x_1 - 3x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = \frac{3}{5}x_2.$$

Det betyder altså, at alle svarmuligheder, hvor x_1 er $\frac{3}{5}$ størrelsen af x_2, er korrekte. Det vil sige, at de tre øverste muligheder er korrekte, og de nederste er forkerte. Eksempel på korrekt

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3.$$

Eksempel på forkert:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow x_1 = -3 \neq \frac{3}{5} \cdot 4 = \frac{12}{5}.$$

Opgave 12

En funktion er givet ved

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

a. Find definitionsmængden for f.

Vi ser, at der kun opstår problemer, når nævneren er 0. Eftersom x^2 og y^2 kun kan være positive (da vi arbejder med reelle tal), kan nævneren kun blive 0, hvis $x = y = 0$. De må bare ikke være nul på samme tid. Så "$x \neq 0$ eller $y \neq 0$"siger, at hvis x ikke er nul, så er vi ligeglade med, hvad y er, men hvis x er nul, så må y ikke være nul.

b. Hvilken beskrivelse svarer til niveakurven med ligningen $f(x,y) = \frac{1}{4}$?

Vi har:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{4}(x^2+y^2) \Leftrightarrow 4x^2 = x^2+y^2 \Leftrightarrow y^2 = 3x^2.$$

Tager vi kvadratroden på begge sider skal vi huske, at have $\pm$, da både positive og negative værdier opfylder dette:

$$y = \pm\sqrt{3x^2} = \pm\sqrt{3}x.$$

Dette er altså to rette linjer gennem $(0,0)$ med hældningskoefficienterne $\pm\sqrt{3}$. Linjerne rammer ikke Origo, da vi husker, at $(0,0)$ ikke var en del af definitionsmængden.

c. Hvad svarer niveaukurven $f(x,y) = 4$ til?

Vi har:

$$f(x,y) = \frac{x^2}{x^2+y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = 4(x^2+y^2) \Leftrightarrow x^2 = 4x^2+4y^2 \Leftrightarrow 4y^2 = -3x^2.$$

Dette kan ikke lade sig gøre, da y^2 ikke kan blive negativ, kan venstre side heller ikke blive negativ. Ligeledes kan højre side ikke blive positiv, hvorfor de altid vil have forskelligt fortegn - med undtagelse af Origo. Men hvad var der nu med Origo? Nåååå ja, Origo var ikke en del af definitionsmængden!

Opgave 13

En flade $\mathcal{F}$ i rummet er bestemt ved ligningen

$$F(x, y, z) = 2xy + 3xz - yz = 2.$$

Nogle af ligningerne i svarmulighederne beskriver tangentplanen for fladen $\mathcal{F}$ i punktet $P = (1, -1, 1)$. Hvilke?

Svar:

Vi kigger blot på relationen mellem hældningerne for x, y og z imellem. Vi differentierer først:

$$F_x(x, y, z) = 2y + 3z, \quad F_y(x, y, z) = 2x - z, \quad F_z(x, y, z) = 3x - y.$$

Ved at indsætte $P = (1, -1, 1)$ får vi:

$$F_x(1, -1, 1) = 2(-1) + 3 \cdot 1 = 1, \quad F_y(1, -1, 1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1, \quad F_z(x, y, z) = 3 \cdot 1 - (-1) = 4.$$

Vi ser altså, at koefficienterne foran x og y skal være ens, mens z skal have en 4 gange så stor koefficient. Det er der kun tre ligninger, der opfylder. Vi ved, at der findes nogle ligninger, der beskriver tangentplanen, så hvis de tre ligninger er ens, må de alle være korrekte. Vi betragter:

$$x + y + 4z = 4.$$

Hvis vi ganger denne igennem med -1 fås:

$$-x - y - 4z = -4,$$

hvorfor de to ligninger altså er identiske. Vi kunne også have ganget den med 2 og fået:

$$2(x + y + 4z) = 2 \cdot 4 \Leftrightarrow 2x + 2y + 8z = 8,$$

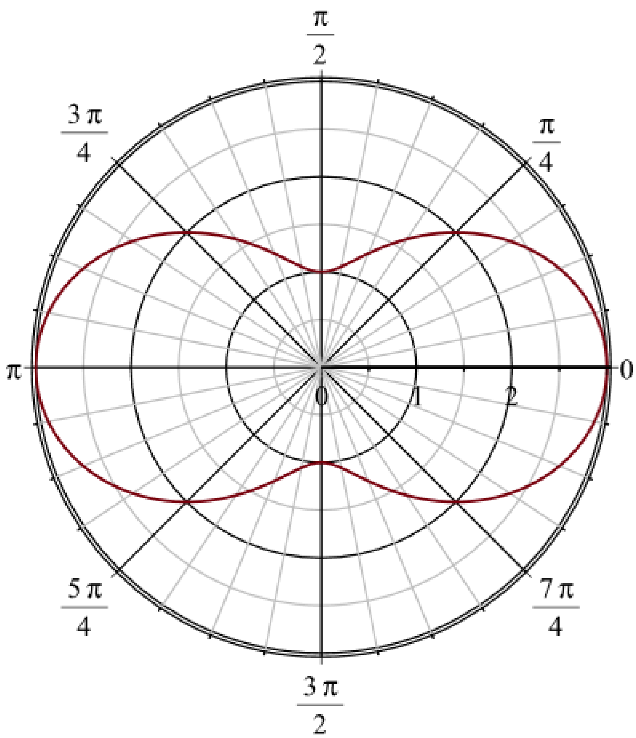
altså er de alle tre identiske. Vi blev lovet, at der nogle ligninger beskrev tangentplanen. Da de er identiske samt var de eneste, der opfyldte koefficient-kravet, så er de alle korrekte.

Opgave 14

Figure nedenfor viser grafen for en funktion

$$r = f(\theta), \qquad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

afbildet i polære koordinater.



Svar:

Vi bruger udelukkelsesmetoden. Vi har funktionerne:

$$f(\theta) = 1 + \cos\theta, \qquad f(\theta) = 2 + \sin\theta, \qquad f(\theta) = 2 + \cos\theta$$

$$f(\theta) = 2 + \sin(2\theta), \qquad f(\theta) = 2 + \cos(2\theta), \qquad f(\theta) = (1 - \sin\theta)^2$$

Til vinklen $\theta = 0$ aflæser vi en radius på 3. Denne indsætter vi så i de forskellige funktioner:

$$f(0) = 1 + \cos 0 = 1 + 1 = 2, \quad f(0) = 2 + \sin 0 = 2, \quad f(0) = 2 + \cos 0 = 2 + 1 = 3$$

$$f(0) = 2+\sin(2\cdot 0) = 2, \quad f(0) = 2+\cos(2\cdot 0) = 2+1 = 3, \quad f(0) = (1-\sin 0)^2 = 1^2 = 1.$$

Der er altså kun to funktioner, der møder kravet om, at $f(0) = 3$. De er:

$$f(\theta) = 2 + \cos\theta, \qquad f(\theta) = 2 + \cos(2\theta).$$

Vi aflæser nu $\theta = \frac{\pi}{2}$ til en radius på 1. Vi indsætter:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2+\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2+0 = 2, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2+\cos\left(2\frac{\pi}{2}\right) = 2+\cos\pi = 2-1 = 1.$$

Altså er svaret

$$f(\theta) = 2 + \cos(2\theta),$$

da denne er den eneste, der opfylder betingelserne.